Manfred Borovcnik, Klagenfurt

Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip in der Mathematik-Didaktik

Fundamentale Ideen stellten den Schlüsselbegriff hinter der New Math - Reform dar. Seither hat die Konzeption eine abwechslungsreiche Geschichte in der Mathematik-Didaktik erfahren. Wenn es hierbei zur konkreten Ausgestaltung gekommen ist, so polarisierten sich Ansätze zwischen recht allgemeinen, und daher wenig handlungsorientierenden Katalogen fundamentaler Ideen und den detaillierten Überschriften einschlägiger mathematischer Lehrbücher. Daneben gab es auch die richtungsweisenden Arbeiten von Schreiber (1979) oder Schweiger (1982). Hier wird die Entwicklung der Konzeption fundamentaler Ideen knapp referiert, ihre Rolle zur zentralen Aufgabe des "Verstehens" im Unterricht wird dargestellt, schließlich werden kritische Fragen für eine solche Konzeption gestellt und es wird eine besondere didaktische Zielsetzung ins Spiel gebracht, die mit der Idee fundamentaler Ideen verbunden werden kann. Für die Stochastik wird der Ansatz von Heitele (1975) kritisch beleuchtet und ein eigener Katalog im besonderen Sinne der erläuterten Zielsetzung skizziert.

1. Zentrale Aufgaben von Unterricht und Didaktik

a) Verstehen als didaktische und unterrichtliche Grundkategorie

Die Frage nach dem Sinn mathematischer Begriffe zu stellen, ist eine zentrale Aufgabe der Mathematik-Didaktik, so widmen Fischer und Malle (1985) ein ganzes Kapitel diesem Thema. Vollrath (1993) zeichnet Verstehen als fundamentale, grundlegende Kategorie aus. Keitel, Otte und Seeger (1980) fokussieren auf die Dialektik zwischen dem Prozeß und dem (End-)Produkt des Verstehens, wobei sich Sinn als Voraussetzung und gleichzeitig Ergebnis von Verstehen ergibt, eine Paradoxie, die Schupp (1993) als spezielle Ausformung der paradoxen menschlichen Existenz anspricht. Sinngebung vollzieht sich nicht nur idiosynkratisch (wie im Konstruktivismus), oder wird von Lehrenden und Lernenden untereinander ausgehandelt (wie im offenen Unterricht), sondern manifestiert sich auch an externen Fakten und Erfahrungen. Speziell gegen einen (zu) offenen Unterricht wendet Schupp (1993) ein: "Sinngebung vollzieht sich ... nicht zuletzt in der Konfrontation mit bereits vorliegenden, in gewissem Sinne standardisierten Wissensbezügen ..."

b) Zu Paradoxien des Verstehens

Vollrath (1993) umschreibt Verstehen durch die formalen Qualitäten der Allgemeinheit, der Lückenlosigkeit und der Strenge sowie durch die inhaltlichen Qualitäten der Reichhaltigkeit und Tiefe. Er zeichnet Paradoxien des Verstehens hinsichtlich all dieser Qualitäten.

Paradoxie der Allgemeinheit: "Man kann das Allgemeine nur verstehen, wenn man das Besondere verstanden hat. Man kann jedoch das Besondere nur verstehen, wenn man das Allgemeine verstanden hat."

Paradoxie der Lückenlosigkeit: " Man kann das Ganze nur verstehen, wenn man die Einzelheiten verstanden hat. Man kann die Einzelheiten nur verstehen, wenn man das Ganze verstanden hat."

Paradoxie der Strenge: " Strenge Überlegungen kann man nur verstehen, wenn man bereits anschauliche Vorstellungen davon hat. Angemessene anschauliche Vorstellungen können sich nur aus strengen Betrachtungen entwickeln."

Paradoxie der Reichhaltigkeit: "Man kann Mathematik in ihrer Reichhaltigkeit nur verstehen, wenn man ihren Kern verstanden hat. Man kann den Kern von Mathematik nur verstehen, wenn man ihre Reichhaltigkeit verstanden hat."

Paradoxie der Tiefe: "Verstehen ist ein Prozeß, der Verständnis als Resultat anstrebt. Verstehen ist aber ohne Verständnis nicht möglich."

Schupp (1993) verallgemeinert zur Paradoxie als durchziehender Konstituenten menschlichen Daseins, wonach sich geistiges Leben in einem Raum, der durch Paradoxien aufgespannt wird, vollzieht.

c) Der Beitrag fundamentaler Ideen zur Förderung von Verstehen

Das Spannungsfeld der Paradoxien des Verstehens ist nach Schupp prinzipiell nicht durch eine Synthese durch dialektische Weiterentwicklung solcher Gegensätze aufzuheben. In dieses Spannungsfeld hinein ist der Lehrende sowie die Mathematik-Didaktik berufen, dynamische Wege aufzuzeigen, die Verstehen dennoch initiieren sollen.

In all diesen Paradoxien sind strukturell die Einzelheiten und das Ganze einander gegenübergestellt. Wie kann man durch Beschäftigung mit den beiden Entitäten (mit welcher soll man beginnen?) zu begrifflichen Verständnis vordringen. Hilfskonzepte, mentale Bilder, Grundvorstellungen etc. sollen eine Antizipation der Begriffe ermöglichen, die erst später durch ihre Bezüge in einer Theorie und zu ihren Anwendungen erklärt werden. Analogien zu ähnlichen, vertrauteren Kontexten wären eine Möglichkeit, auch die interviewhafte (dem empirischen Interview der mathematik-didaktischen Forschung nachgeahmte) Auseinandersetzung mit den Lernenden sollten eine Brücke über die beiden Seiten der Paradoxie schlagen lassen. Fundamentale Ideen könnten nun so aufgefaßt werden, daß ihre Hauptfunktion darin besteht, diese Begriffe frühzeitig antizipieren zu lassen und so die Paradoxien lokal und dynamisch zu überwinden.

2. Fundamentale Ideen - Die historische Veränderung einer Konzeption

a) Das Klima der New Math - Reform: Fundamentale Ideen und axiomatische Struktur

Bruner (1960) hat in seinem Bericht von der legendären Woodshole-Konferenz, welche die strukturmathematische Reform vorbereitet hat, den Begriff der fundamentalen Ideen, der Struktur eines Faches geprägt. Er zitiert Inhelder, wonach die psychologische Entwicklung eines Individuums dem axiomatischen Aufbau einer Disziplin genauer gleiche als dessen historische

Genese. Noch Piaget (1973) sieht eine ganz enge Parallelität zwischen mentalen Strukturen des Individuums und der axiomatischen Struktur. Klar, daß daraus die New Math - Reformbewegung werden mußte. Die Thesen von Bruner (1960) könnte man knapp so zusammenfassen:

- Führende Forscher der Fachdisziplin müssen bei der Erstellung der Curricula mitarbeiten.
- Zentral ist die Vermittlung der Struktur, der fundamentalen Ideen eines Faches.
- Die Grundlagen eines jeden Faches können jedem Menschen jeden Alters in intellektuell ehrlicher Form beigebracht werden.
- Das Curriculum ist spiralig aufzubauen, auf den verschiedenen Stufen gibt es keine prinzipiellen Unterschiede sondern nur hinsichtlich des Formalisierungsgrades.
- Der Übergang von den konkreten zu den formalen Operationen wird erleichtert durch die antizipierende Funktion des intuitiven (!) Erfassens von Zusammenhängen.
- Das Interesse der Lernenden erwächst hauptsächlich aus der Sache selbst.

Neben der Gleichsetzung von fundamentalen Ideen mit der Struktur des Faches fällt auf, daß Bruner der Intuition eine besondere Rolle für das Erfassen von Zusammenhängen zuschreibt; Zusammenhänge, die, so läßt sich vermuten, durch die Hervorhebung der fundamentalen Ideen geprägt werden sollten.

b) Fundamentale Ideen in der Mathematik-Didaktik: Erste Ansätze

Wittmann (1973) folgert aus den Brunerschen Thesen und dem Bezug zu Piaget die Prinzipien der "Orientierung an den Grundideen" sowie das "Spiralprinzip" und daraus weiter die Prinzipien des "Vorwegnehmenden Lernens" und der "Fortsetzbarkeit". Wenn ein Begriff auf den unterschiedlichen Stufen sich nicht prinzipiell voneinander unterscheidet, sondern nur in der Art der Beschreibung, so sind die späteren Stufen rechtzeitig zu antizipieren und frühere Stufen sind aufzugreifen, weil sie ja den späteren Begriff schon auf einer niederen Stufe zum Inhalt hatten. Heitele (1975) arbeitet dann in der Wittmann-Tradition einen Katalog fundamentaler Ideen zur Stochastik aus, auf den im vierten Abschnitt noch eingegangen wird. Neu bei Heitele ist die Erweiterung von fundamentalen Ideen auf fundamentale Fehler, wohl so etwas wie weit verbreitete Auffassungen, die sich mit den Folgerungen aus fundamentalen Ideen nicht vereinbaren lassen.

c) Neue Wege: Trennung fundamentaler Ideen von den axiomatischen Bezügen

Schreiber (1979) markiert einen neuen Weg in der Begriffsgeschichte, weg vom axiomatischen Bezug der fundamentalen Idee, er ortet deren eigentliche Bedeutung, deren geistiges Gewicht an der Anbindung an geschichtliche und kulturelle Tradition, dieser Rahmen gehört mit zum Verständnis von Mathematik. Oder, er macht ihn, wie man Schreiber uminterpretieren könnte, erst und eigentlich aus. Dementsprechend sieht er fundamentale Ideen *quer* zur mathematischen, axiomatischen Struktur der Begriffe. Schreiber (1979) prägt auch neue Benennungen, er unterscheidet zwischen *universellen* und *zentralen* Ideen, er nennt an universellen Ideen Algorithmus (mechanische Rechenverfahren), Exhaustion (insbesondere Approximation), Invarianz (Erhaltung von Struktur und Eigenschaften), Optimalität (Erfüllen einer Bedingung bestmöglich), Funktion (funktionale Zusammenhänge) sowie Charakterisierung (Klassifizieren). Bender und Schreiber (1985) konkretisieren dann diese allgemeinen Ideen für die Geometrie. Bei Schweiger (1982, 1984) tauchen die fundamentalen Ideen in leicht veränderter Form auf, neu sind die Idee der Normalformen und der Kraft des Formalen sowie die Idee des erweiternden Umdefinierens. Tietze (1979) argumentiert für eine Hierarchisierung des Begriffs fundamentaler Idee und führt die Begriffe (von oben nach unten) Leitidee - bereichsspezifische Idee - zentrale Mathematisierungsmuster ein.

Allen diesen Ansätzen gemeinsam ist nun die Abkehr von der zentralen Gleichstellung von axiomatischen und mentalen Strukturen, die genannten Ideen werden allgemeiner. Weiters ist den Ansätzen gemein, daß sie fundamentale Ideen als subjektiv geprägt sehen und ihren vorläufigen, d.h. ausbaufähigen Charakter betonen. Ein Katalog von fundamentalen Ideen muß wachsen und persönlich geprägt sein, damit er für den Unterricht oder für didaktische Grundsatzüberlegungen wirksam werden kann. Ferner fällt auf, daß bei diesen Katalogen (und bei weiteren, hier nicht genannten) eine Dichotomisierung auftritt: die Ideen sind entweder recht allgemein gehalten oder sie sind eng an der mathematischen Darstellung (wie sie in Textbüchern vorkommt) orientiert. So kommt Tietze (1979) etwa für die Lineare Algebra und Analytische Geometrie zu den Leitideen Vektorraum, Basis, Räume mit Skalarprodukt, etc. und bei den bereichsspezifischen Strategien u.a. zum Gaußalgorithmus.

Wenngleich Tietze aus einer ganz anderen Perspektive heraus eine Ordnung in der Stoffülle mit seinem Ansatz der fundamentaler Ideen (erfolgreich) herstellt, sei hier angeführt, daß der Autor mit fundamentalen Ideen eine ganz andere Zielrichtung verfolgt als die der Benennung zentraler mathematischer Begriffe, die an stark vernetzten Knoten in einem Graphen der Begriffszusammenhänge stehen. In dieser anderen Orientierung (siehe Abschnitt 3) wäre die Algorithmisierung einer Lösung, in diesem Falle der Gaußalgorithmus zur Lösung von Gleichungssystemen, die Leitidee. Aus der Thematisierung des Verhaltens des Algorithmus und der verschiedenen Endstadien und der Beschreibung des Algorithmus in allgemeiner Form fallen die genannten Begriffe der Linearen Algebra wie von selbst heraus; der Ansatz wurde von Strang (1976, 1988) oder von Artmann und Törner (1982) überzeugend dargelegt.

Ein weiterer Katalog fundamentaler Ideen findet sich etwa in Reichel (1994), hier für die Angewandte Mathematik. Reichel definiert die Angewandte Mathematik mehr als eine Haltung, als eine Einstellung zur Mathematik. Ich interpretiere seine Bemühungen um die Angewandte Mathematik als Beitrag zur Reichhaltigkeit der Mathematik (siehe die Paradoxien von Vollrath in Abschnitt 1), in gewissem Sinne nützt er Angewandte Mathematik, um ein umfassenderes Verständnis von Mathematik aufzubauen. Er nützt Anwendungen illustrativ, indem er über die Anwendungen mehr von der "Natur" und ordnenden Kraft mathematischer Begriffe erschließt. Daneben gibt es in der Diskussion von Anwendungen auch die situative Verwendung von Mathematik, wo der Schwerpunkt an den authentischen Situationen liegt, die mit Hilfe von mathematischen Begriffen und Modellen strukturiert werden, woraus sich handlungsrelevantes Wissen ergeben soll. Zu einer Unterscheidung zwischen illustrativer und situativer Modellbildung siehe Kaiser-Meßmer (1989); für den potentiellen Beitrag situativer Modellbildung zur Allgemeinbildung in der Mathematikausbildung sei auf Jablonka (1996) verwiesen.

3. Die Rolle fundamentaler Ideen für die Ausformung von Verständnis

a) Kritische Fragen an eine Konzeption von fundamentalen Ideen

Die Antwort auf die Frage, ob eine Idee fundamental ist, wird ganz unterschiedlich ausfallen, je nachdem, ob man als Bezugsrahmen methodologische, innermathematische oder kognitive Fragen wählt. Im Rahmen methodologischer Fragen werden etwa entweder die strukturellen oder die funktionalen Dimensionen von Modellbildungsprozessen in den Vordergrund treten (siehe Jablonka 1996). In der innermathematischen Auseinandersetzung wird die axiomatische Rechtfertigung von Begriffen innerhalb einer geschlossenen Theorie wichtig. Dazwischen etwa stehen illustrative Anwendungen von Mathematik, wo das Spannungsfeld zwischen bestimmten mathematischen Begriffen und deren ordnender Kraft für reale Situationen dominiert. Ganz anders hingegen kognitive Fragestellungen, wo, unter Überwindung der engen Parallelität zwischen mentalen und axiomatischen Strukturen die Frage nach der individuellen Sinnkonstruktion in den Vordergrund tritt.

Die Frage nach dem fundamentalen Charakter von Ideen wird auch unterschiedlich bewertet und beantwortet werden, je nachdem, ob man die damit zusammenhängenden Begriffe, oder die dadurch zu prägenden Begriffe in ihrem Verwendungs-, ihrem Begründungszusammenhang, oder in ihrer Entstehungsgeschichte betrachtet. Eng damit verknüpft und suggestiver formuliert sind es die Fragen nach dem Ziel für die Ideen oder die davon geprägten Begriffe: Wozu wird ein Begriff verwendet bzw. entwickelt? Warum ist ein Begriff gerade so und nicht anders gefaßt worden? Wie kann man den Begriff dazu verwenden, um andere Gedanken damit darzustellen bzw. einem anderen mitzuteilen?

b) Allgemeine Orientierungen als Überbau zu fundamentalen Ideen

Um die eigene Sicht bzw. den Verwendungszweck von fundamentalen Ideen auszuformulieren, werden i.f. drei ganz allgemeine Orientierungen wiedergegeben.

Offene Mathematik ist von Fischer (1984) ausformuliert worden als ein Prozeß, der aus geschlossener Mathematik wieder eine Mathematik in statu nascendi, i.e. im Entstehen macht. In dieser Offenen Mathematik geht es um die Auseinandersetzung mit einem Problem, zu dessen Bearbeitung mathematische Begriffe rekonstruiert werden oder teilweise echt entstehen. Dabei erhalten Begriffe mit hohen und direkten Erklärungswert eine wichtige Funktion. Ein wesentlicher Nebeneffekt liegt darin, daß Zwecke und Interessen, die mit einem Begriff verbunden sind (und die bei seiner Entstehung seinerzeit eine Rolle gespielt haben) wieder offen gelegt werden.

Explorative Mathematik, bei Fischer (1984) nur in der speziellen Form der Explorativen Datenanalyse verwendet, stellt eine weitere, ganz allgemeine Orientierung dar, in welcher ein weitestgehend "theoriefreies" Experimentieren mit Situation sowie mit mathematischen Begriffen oder Modellen) Einsichten vermitteln soll. In beiden Fällen stellt die komplementäre Suche nach

Mustern und Singularitäten (als Abweichungen von diesen Mustern) ein zentrale Stoßrichtung dar.

Visualisieren ist bei Fischer (1984) in einer sehr allgemeinen, sehr umfassenden Art als Erschließung der visuellen Struktur der Mathematik und ihrer Symbolik verstanden. In Borovcnik (1987) wird die Orientierung Visualisieren auf das Materialisieren abstrakter Begriffe "reduziert"; allerdings geht es um weit mehr als die bloße Veranschaulichung bestimmter, und nur weniger Eigenheiten des Begriffes (was möglicherweise sogar zu einer didaktischen Entartung des Begriffes führt); vielmehr spielen gerade Operationen mit diesen Materialisierungen, welche wesentliche Züge des Begriffes wieder Aufleben lassen, eine tragende Rolle.

c) Zum Potential fundamentaler Ideen

Im Lichte dieser allgemeinen Orientierungen von Offener Mathematik, Explorativer Mathematik und Visualisierung läßt sich nun ganz konzise formulieren, was fundamentale Ideen leisten sollen: Fundamentale Ideen sollen Begriffe und Methoden wieder mitsamt ihren sozial-kommunikativen Komponenten erlebbar machen. Sie sind ja in der Auseinandersetzung (Kommunikation) mit "Problemen" unter ganz bestimmten Zielen, Zwecksetzungen und Interessen heraus entstanden. Fundamentale Ideen sollen aus geschlossener, in sich erstarrter Mathematik wieder Offene Mathematik machen. Mitentscheidend, ob eine Idee als fundamental eingestuft wird, ist auch, wie sehr dadurch Begriffe auf einer Metaebene strukturiert, oder besser geprägt werden, d.h. ob alternative Begriffe, ob mehrere Begriffe und ob gleichzeitig Kriterien und Metawissen für die Bewertung dieser Begriffe herausfallen.

Neben dieser angesprochenen selbstorganisierenden Potenz von fundamentalen Ideen sollen solche Ideen folgende Ziele besser verfolgen helfen:

- Phänomene ordnen
- Wissen transferieren
- Wissen rekonstruieren
- Wissen antizipieren.

Eine Liste Fundamentaler Ideen zur Beschreibenden Statistik, die in dieser angesprochenen Vorstellung ausgearbeitet wurde, findet sich in Borovcnik (1987), sie prägt den Stoff durch folgende Ideen:

- Phänomene ordnen
- Einfügen einzelner Daten in ein Sinnvolles Ganzes
- Raffung von Information
- Quantifizierung von Sachverhalten
- Umgang mit Variabilität
- Gleichzeitige Suche nach Mustern und Besonderheiten

4. Jenseits von Heitele - Fundamentale Ideen der Stochastik

Gerade in der Stochastik-Didaktik ist man trotz der Lippenbekenntnisse zur Bedeutsamkeit von stochastischem Denken nicht wirklich über den Ansatz zu fundamentalen Ideen von Heitele (1975) hinausgekommen. Stochastisches Denken wird allzu sehr an die Beherrschung stochastischer Verfahren gebunden, im technischen Aspekt geht jedoch eine allgemeine Orientierung verloren, nicht zuletzt auch die besondere Eigenart von Information, die hier mathematisiert wird. Der Katalog von Heitele wird im folgenden knapp dargestellt und kritisiert, ein eigener Katalog fundamentaler Ideen wird skizziert, der sich einerseits um die allgemeine Orientierung Offene Mathematik ansiedelt und die kritischen Fragen nach dem wozu der Begriffe und Methoden an der allgemeinen Idee "Information" ausrichtet.

a) Der Katalog von Heitele

Heitele (1975) versteht unter fundamentalen Ideen zunächst "ideas which provide the individual on each level of his development with explanatory models ... which differ on the various cognitive levels, not in a structural way, but only by their linguistic form and their levels of elaboration". Dann expliziert er seine Liste (hier im englischen Original zitiert), die Kritik daran muß hier ganz kurz ausfallen. Die Liste von Heitele besteht tatsächlich mit Ausnahme der Punkte I, üblicherweise als trivial abgehandelt, und VII, erst in der jüngeren Entwicklung des Faches forciert, aus den Kapitelüberschriften eines mathematisch gehaltenen Stochastiklehrbuches.

I *Norming the expressions of our belief*

Heitele erklärt "This means ..., mapping its multidimensionality upon the one-dimensional real unit interval." Dieses Fokussieren auf lediglich einen kleinen Ausschnitt von relevanten Beziehungen und die Metrisierung von Eigenschaften ist grundlegend für jedwede Modellbildung und nicht etwas Stochastikspezifisches.

Diese vereinfachende Projektion einer vieldimensionalen Situation auf eine (einzige) reelle Zahl (i.e. ihre Wahrscheinlichkeit) trifft daher nicht den Kern; vielmehr geht es um die Kalibrierung eines solchen "Meßvorgangs" und den Charakter einer solchen Aussage. Die Art der Information, die in einer Wahrscheinlichkeitsaussage erfaßt wird und wie sich diese Art von anderen Informationen unterscheidet, ist dagegen fundamental.

II *The probability field*

Heitele erläutert diese Idee mit "Not less fundamental ... is ... to assign a sample space of observable outcomes to chance experiments, and a σ-field of sets to the field of observable outcomes. ... makes the chance experiment surveyable. ... fundamental in still another respect ... people ... believe in coercion by hidden causes ..."

Hierzu ist einzuwenden, daß es eine grundraumfreie Stochastik gibt, d.h. eine axiomatisch begründbare Theorie von Zufallsvariablen, welche die Eigenschaften des Erwartungswerts und nicht die Eigenschaften von Grundräumen zum Ausgangspunkt der strukturellen Überlegungen macht, siehe Bentz (1980, 1983) oder Freudenthal (1980); weiters ist festzuhalten, daß der Erwartungswert bei Huygens (1657) den zentralen Begriff darstellt, er scheitert im Vergleich zu Bernoulli (1714) nur an der Komplexität der Berechnungen, nicht an deren begrifflicher Schwierigkeit; allerdings übernimmt Bernoulli mit seiner Kombinatorik und der dadurch aufgewerteten Rolle des Grundraumes die "Führung" (teilweise ist diese begriffliche "Kontroverse" auch dadurch entschieden worden, daß van Schooten Huygens nicht adäquat ins Lateinische übersetzt hat und damit wesentliche Nuancen in Huygens holländischem Original eine größere "community" gar nie erreichten).

Eine Dominanz des Grundraumes im Begrifflichen, die angesichts der modernen Computer, aber auch wegen der (inzwischen vorliegenden) genaueren Analyse der Tragfähigkeit von stochastischen Grundkonzepten, nicht mehr gerechtfertigt zu sein scheint. Ferner muß man anerkennen, daß ein Großteil der Wahrscheinlichkeitsrechnung (nicht -theorie) und ein Großteil der Anwendungen, z.B. auch in der modernen Physik (in der Quantentheorie) ohne den Begriff Grundraum auskommt; es sei hier auch auf das Konzept der diskreten und stetigen Verteilung verwiesen, wo die Punktmenge oder das Intervall der möglichen Werte ganz naiv ohne Ereignisstruktur verwendet wird.

Wie die Betonung der Struktur des Grundraumes die von Heitele angeführten kausalen Argumentationsmuster "bekämpfen" soll, ist nicht klar. Letztlich wird hier aus der nachträglichen mathematischen Rechtfertigung retrospektiv eine Idee überbewertet, in der Genese und den Anwendungen kam und kommt man mit einfachen Hilfsmitteln der diskreten Mathematik und Analysis weit, ohne auch nur die mengentheoretischen Bezüge zu tangieren.

III *Combining probabilities - the addition rule*

In III unterliegt Heitele der Faszination des Berechnens "to build more complex models ... ", allerdings kommt bei der Additionsregel begrifflich gar nichts neues heraus, es bleibt eine triviale Regel.

IV *Combining probabilities - independence*

Heitele stellt hier einen Bezug zur Revision von Wahrscheinlichkeitsurteilen durch neue Information sogar her: "the concept of conditional probability ... is interpreted ... as a measure of how the degree of our belief is changed by new information." (Nur nebenbei, Heitele mißversteht das zu beurteilende Ereignis als zeitlich später ("after") als die bedingende Information) und betrachtet die Bezüge zur naiven kausalen Unabhängigkeit als wesentlich.

Auch hier geht er von einem schon von Kolmogoroff (1933) in seiner Axiomatisierung als zentral eingestuften Begriff als fundamental aus und stellt wiederum die Rechtfertigung der Begriffe innerhalb einer Theorie als Ausgangspunkt der Idee heraus. Dadurch wird leitende Idee und mathematischer Begriff umgekehrt und die Einsicht verhindert, daß zur Idee (nämlich zur Idee der Revision von Wahrscheinlichkeitsurteilen) eine ganz andere mathematische Begrifflichkeit auch paßte.

Der subjektivistische Zugang gibt nicht der Unabhängigkeit sondern der viel leichter zu fassenden Austauschbarkeit (exchangeability, eine Vertauschbarkeit hinsichtlich der Reihenfolge, die ohne Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit bleibt) den Vorzug; die Unabhängigkeit ist ferner lediglich ein Spezialfall der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Die Fokussierung auf den mathematischen Begriff der Unabhängigkeit verstärkt mehr die Mißverständnisse mit der Überlappung dieses Begriffes mit den inhaltlichen Vorstellungen zu kausalen Zusammenhängen als daß sie diese zu klären imstande ist.

V *Equidistribution and symmetry*

Heitele führt aus "... first four ... ideas do not lead to indications how to compute probabilities ... It is a heuristic idea to discover and use symmetries ..." Eine allgemeine Symmetrie (in einer gar nicht stochastikspezifischen Form) wird hier überbewertet, die weiteren Ausführungen sind sehr angreifbar "... the equidistribution is the most natural working hypothesis ... . in Bayes' theory, ... the a priori distribution ... is assumed as an equidistribution as long as there is no argument against it."

Bei der Gleichverteilung handelt es sich lediglich um den Ausdruck einer speziellen Information über eine unsichere Sache; diese spezielle Information ist auch viel besser als Ausdruck einer Indifferenz in bezug auf Handlungen (etwa Wetten und akzeptierte Quoten) anzusehen; damit wird eine so unsymmetrische Situation wie das Umrühren von vielen Kugeln in einer Urne auch tatsächlich symmetrisch. Auch hier wird die Idee der mathematischen Darstellung von spezieller Information mit dem Endprodukt (hier der Gleichverteilung) vertauscht.

VI *Combinatorics*

In VI wird eine Berechnungsmethode überbewertet "It is too simple a policy to consider combinatorics as ancillary to probability ...", man braucht kombinatorische Überlegungen im wesentlichen nur für die effiziente Herleitung (und damit für ein unmittelbareres Verstehen) der Binomialverteilung, sonst braucht man eigentlich nur Baumdiagramme; auch hier sei auf Huygens verwiesen, der Wahrscheinlichkeiten, oder besser Erwartungswerte aus Baumdiagrammen rekursiv ohne kombinatorische Hilfsmittel berechnen konnte; in gleicher Weise wie schon oben soll der Hinweis auf Computer genügen.

Der dynamische Aspekt zwischen dem Gewicht eines Ereignisses in Form der Anzahl von Möglichkeiten und der tatsächlichen, zwar fluktuierenden relativen Häufigkeit, die aber in etwa um dieses Gewicht herum schwankt, diese wechselseitige, komplementäre Rolle von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit wird durch die statische Berechnungsmethode der Kombinatorik eingefroren.

VII *Urn model and simulation*

In VII sei festgehalten, daß Urnen schon bei der Kalibrierung von Wahrscheinlichkeitsurteilen eine wichtige Rolle spielen; ein Punkt, der bei Heitele gar nicht angesprochen wird. Dagegen führt er explizit folgende fundamentale Verwendungen der Idee an: (i) Zur konkreten Beschreibung des Prozesses des Stichprobenziehens "The only way to describe it [the process of getting random samples] ... is concretising it by the urn model", (ii) zum simulativen Nachspielen komplexer Experimente "... urns can be compounded ... into hyper-urns ... . This allows one ... to simulate so complex chance processes as ... by a sequence of urns." und (iii) ganz allgemein zur Simulation von Zufallsexperimenten durch Urnen oder Glücksspiele im Sinn der Monte Carlo - Methode.

Für (i), die Beschreibung des Prozesses des Stichprobenziehens, einer wichtigen Idee, fehlt die Leitidee des "wozu" und was der Zufall hier bewirken soll.

Für (ii), die übliche und weitest verbreitete Nutzung bringt die Simulation wenig Einsicht, außer daß eventuell ein intuitives Urteil über eine Wahrscheinlichkeit falsch liegt; die Simulationsmethode spielt ihre Stärke nicht durch tatsächliches Nachspielen aus (auch wenn dies fälschlicherweise als authentischer Beweis von vielen Menschen akzeptiert wird), sondern gerade erst durch Offenlegen der verwendeten Annahmen, die zum konkreten Modell für die Simulation einer Situation führen.

Für (iii) wird die Isomorphie zwischen verschiedenen Materialisierungen von Zufall relevant; man verwendet dann z.B. Urnen als Standardreferenz zur Modellierung anderer Zufallsphänomene; dann aber wird die in I angesprochene Kalibrierung und die Erfassung des eigenen Charakters von Information, die in Wahrscheinlichkeitsaussagen gespeichert ist, relevant.

Insgesamt spielt sich bei Heitele wieder die Diskussion einer fundamentalen Idee auf der Ebene der technischen, mathematischen Details ab, anstatt von Leitgedanken getragen zu sein, woraus Begrifflichkeiten erwachsen. So nebenbei sei festgehalten, daß ein allgemeiner Informationsgedanke als Überbau die aus der Simulationsidee linear folgende allzu starke Bindung von Wahrscheinlichkeit an die Deutung als relative Häufigkeit relativieren soll, ja muß.

VIII *The idea of stochastic variable*

Heitele spricht nicht genau aus, was er unter Zufallsvariable meint, spekuliert jedoch darüber, daß historische Schwierigkeiten wie das Petersburg-Paradoxon oder das Bernoullische Gesetz der Großen Zahlen mit diesem Begriff gar nicht aufgetreten wären. Im weiteren erläutert Heitele dann, in welcher Hinsicht Zufallsvariable als erklärendes Modell eine wichtige Rolle spielt: "the distribution of a stochastic variable, its expectancy, and the compounding stochastic variables to get new ones."

In VIII muß festgehalten werden, daß innermathematisch viele Bezüge tatsächlich leichter werden, doch nicht unbedingt als Konsequenz eines Begriffs Zufallsvariable als (meßbare) Funktion, sondern bereits und vor allem als naive Zusammenschau von möglichen Werten und deren Wahrscheinlichkeiten. Auch hier gilt der Verweis auf diskrete und stetige Verteilungen in der üblichen naiven Auffassung als mögliche Werte mit diskreter Dichte oder stetiger Dichtefunktion zur Beschreibung der Gewichte bzw. Wahrscheinlichkeiten dieser Werte.

Wieder wird der mathematische Begriff am Ende, nämlich der der Zufallsvariablen, bei Heitele als fundamental eingestuft, während die Art Information darzustellen, zu verdichten, oder überhaupt deren Präzision begrifflich zu erfassen zu Hilfsbegriffen werden.

IX *The laws of large numbers*

In IX findet sich die übliche Einstufung von zentralen Sätzen der Theorie als zentrale und damit fundamentale Idee wieder. *Innermathematisch* wird hier tatsächlich und zu Recht eine fundamentale Idee abgehandelt: "... but what really matters is that this [empirical] principle of large numbers possesses an internally mathematical correlative in the laws of large numbers which can be derived from the model of probability field so as to justify it by this consequence as a good model."

In der Theorie wird auf einer Reflexionsebene aber eigentlich eine andere Idee gerechtfertigt, nämlich die, wie man den Informationsgehalt einer Stichprobe erhöht, oder, wie man die Variabilität des Zufalls verringert. Fundamental ist also nicht, was im Grenzwert passiert, das passiert nur in der Rechtfertigungsebene des Mathematikers.

Was die Aussagen aus dem mathematischen Gesetz der Großen Zahlen mit Fehleinschätzungen, etwa aus dem Alterations"modell" oder dem "Gesetz der Serie", zu tun haben, oder wie man durch Lernen der mathematischen Beziehung die alternativen Modelle als inadequat erkennen soll, wie Heitele (oder auch andere) behaupten, bleibt unklar, denn diese alternativen Modelle sind durchaus (auch mathematisch) mit dem Gesetz der Großen Zahlen vereinbar; sie behandeln darüber hinaus das Zufallsgeschehen aus der Sicht von Abhängigkeiten aufeinanderfolgender Ergebnisse und gerade nicht summarisch mit statistischen Mittelwerten (hier Anteilen) und gar deren "Grenzverhalten".

X *The idea of sample*

Heitele spricht ganz allgemein von der großen Bedeutung von Stichproben: "Since thinking, judging, inferring is only possible on the basis of samples ... . everybody should consider sampling and its consequences as crude models to explain the reality ... and clearly understand in every particular case that his conclusions are statistical ..."

Er beläßt die Details im vagen, spricht aber ein elementares Experiment mit dem Auszählen von Reiskörnern auf einem quadratischen Gitter an, in welchem die Grundgesamtheit mit den Planquadraten als Stichproben gleichzeitig visualisiert werden. Darüber hinaus spricht Heitele noch von der Gefahr nichtrepräsentativer Stichproben: "Prejudgment is nothing else but judgement on the strength of non-representative samples."

Auch hier ist die Idee der zufälligen Stichprobe nur Konsequenz einer anderen Idee, nämlich überhaupt repräsentative Information zu erhalten. Diesen wichtigen Punkt vermißt man aber bei Heitele.

b) Leitlinien für die Prägung von Inhalten - Jenseits von Heitele

Es muß aus Platzgründen einfach eine Liste von fundamentalen Ideen des Autors zur Stochastik folgen, schon aus der Formulierung wird klar, daß es sich um stochastikspezifische Ideen handelt, die den Kern der Sache umreißen. Weitere stochastische Begriffe und Methoden werden sich daran anhängen. Hier wird jedoch nur mehr diejenige Idee von Heitele angegeben, die darunter subsumiert wird. Details findet man verstreut in einigen Arbeiten des Autors, u.a. in Borovcnik (1992).

✗ *Ausdruck von Information über eine unsichere Sache:* I, II, V, VIII

Dies stellt insbesondere klar, um welche *Art* von Information es in der Stochastik geht, daß es um eine "Vorausschau" in die Zukunft (oder eine Abwägung über die Vergangenheit) geht, ohne Prädiktion, i.e. ohne die genaue und sichere Vorhersage eines konkreten Versuches; Wahrscheinlichkeit subsumiert eine andere Art von Information als kausale oder logische Erklärungsmuster und hilft letztlich, Entscheidungen unter Unsicherheit transparent zu gestalten. Die Gewichtung von Möglichkeiten mit Wahrscheinlichkeiten fällt hier genauso darunter wie der Ausdruck von Unsicherheit (oder Sicherheit) durch diskrete oder stetige Verteilungen.

- ✗ *Revidieren von Information unter neuen (unterstellten) Fakten:* IV, V

  Hierunter fallen insbesondere die Begriffe bedingte Wahrscheinlichkeiten und, als Spezialfall, die Unabhängigkeit (der Fall, daß keine wirklich neue Information vorliegt und daher die Wahrscheinlichkeitsbewertung nicht verändert werden muß). Ebenso fällt die Laplacesche Gleichverteilung hierunter als Ausdruck einer Indifferenz, eine spezielle Art von Information über eine Situation.

- ✗ *Offenlegen verwendeter Information:* VII

  Der Witz einer Simulation liegt insbesondere darin, daß durch die materielle Fassung der Situation die impliziten Vorwegnahmen über die Situation offen gelegt werden; es wird klar, in welcher Form und ob in geeigneter Weise die Situation durch das Modell erfaßt wird.

- ✗ *Verdichten von Information:* VIII

  Wird die Verteilung eines Zufallsphänomens schon im Ausdrücken von Information abgedeckt, so wird durch die Idee des Verdichtens eine Kennziffer, etwa der Erwartungswert, als Repräsentant dieser Information forciert; gleichzeitig wird dadurch der Zufall, genauer die Variabilität, im mathematischen Modell eingeebnet.

- ✗ *Präzision von Information - Variabilität:* VIII

  Die Standardabweichung (oder die mittlere lineare Abweichung etc.) als Kennziffer für die Verteilung von Zufallsvariablen fällt als Nebenprodukt des Bemühens, die Präzision einer Information zu bewerten, heraus.

- ✗ *Repräsentativität partieller Information:* X

  Die Repräsentativität partieller Information (bezüglich einer Teilmenge, oder bezüglich der zeitlich begrenzten Beobachtung eines datenerzeugenden Prozesses) ist Schlüssel für die Generalisierung dieser Information auf eine größere Gesamtheit. Zufällige Auswahl ist nur die technische Realisierung dieser Idee.

- ✗ *Verbesserung der Präzision:* IX

  Bei kleineren zufälligen Stichproben verfügt man über weniger (präzise) Information als bei größeren. Man kann sogar über die abnehmende Rate des Informationsgewinns bei größeren Stichproben spekulieren. Das Gesetz der großen Zahlen ist nur eine nachträgliche, mathematische Rechtfertigung dessen, was passiert, wenn der Stichprobenumfang über alle Maßen anwächst.

c) Implizite Ziele fundamentaler Ideen

Durch fundamentale Ideen im Sinne des Autors sollen folgende Ziele implizit verfolgt werden. Es soll keine innermathematische Prägung stattfinden oder repliziert werden, vielmehr sollen fundamentale Ideen quer zur üblichen Fachsystematik Metawissen um die Fragestellungen und Kriterien, die mathematische Begriffe bearbeiten lassen bzw. erfüllen sollen, bereitstellen. Es sollen alternative Begriffe herausfallen und gleichzeitig Kriterien zu deren Bewertung klar werden. Fundamentale Ideen sollen didaktische und unterrichtliche Tätigkeit zielorientiert erscheinen lassen; Mathematik wird als offene Mathematik in einem Prozeß zur Lösung anstehender Fragen transformiert.

Damit werden mathematik-didaktische Überlegungen fokussiert und unterrichtliche Vorgehensweisen bewertbar, man könnte fundamentalen Ideen die Kraft eines (von mehreren) Organisationsprinzipien der Mathematik-Didaktik zuschreiben.

5. Zusammenfassung

Fundamentale Ideen sollen also, in der hier skizzierten Sicht, die sozio-kommunikativen Aspekte von Begriffen hervorkehren; sie sollten allgemein genug und doch prägend sein, daß sie die Zwecke und Interessen, die zur Lösung von Problemen auftauchen, offen legen, ganz im Sinne der allgemeinen Orientierung Offene Mathematik von Fischer (1984). Jedenfalls sollen aus einer fundamentalen Idee mehrere alternative Begriffskonzeptionen herausfallen und gleichzeitig Kriterien für die partielle Bewertung dieser, es soll der Prozeß des Mathematisierens, der Mathematik in statu nascendi aufgerollt werden; in diesem Sinne quer zur Mathematik, Metawissen mit einschließend. Bei der vorgebrachten Kritik anderer Ansätze zu fundamentalen Ideen muß auch berücksichtigt werden, daß andere Zielsetzungen zu anderen Konzeptionen führen, die im Lichte der vorgebrachten Fragen kritisch beleuchtet wurden, doch diesen anderen Zielsetzungen sehr wohl genügen können und genügen. Nicht nur hier bedarf es weiterer Forschungen. Auch das Verhältnis von Fundamentalen Ideen und dem Programm der Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen (doch eher am Fach orientiert vs. am Individuum und dessen kognitiver Struktur angebunden, oder komplementär zueinander) ist ein lohnenswertes Feld für weitere Forschungen.

Die vorliegende Diskussion von Fundamentalen Ideen sollte aufzeigen, daß trotz der subjektiven Bedingtheit fundamentaler Ideen und deren Vorläufigkeit die Konzeption aktive Gestaltung von mathematik-didaktischer Forschung und von Unterricht prägen kann.

Literatur:

Artmann, B. u. Törner, G.: *Lineare Algebra. Grund- und Leistungskurs.* Göttingen und Zürich: Vandenhoek & Ruprecht 1982.

Aspetsbeger, K, Fuchs, K., Schweiger, F.: Fundamental ideas and symbolic algebra. Univ. Salzburg: unveröffentlichtes Manuskript 1995.

Bender, P., Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*, Stuttgart: Teubner 1985.

Bender, P.: Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht erläutert an Beispielen aus den

Sekundarstufen. In: Postel, H., Kirsch, A., Blum W. (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen*, Festschrift für Heinz Griesel, Hannover: Schrödel 1991, 48-60.

Bentz, H.-J.: Stochastics teaching based on Common Sense. In: Grey, D.R. e.a. (Hrsg.): Proc. *First Intern. Conference on Teaching Statistics*, Sheffield: Teaching Statistics Trust, 753-765.

Bentz, H.-J. u. Palm. G.: Wahrscheinlichkeitstheorie ohne Mengenlehre. In: *mathematica didactica* **3** (1980), 167-183.

Borovcnik, M.: Zur Rolle der Beschreibenden Statistik. In: *mathematica didactica*, Teil I **9** (1986), 177-191; Teil II **10** (1987), 101-117.

Borovcnik, M.: *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik.* Mannheim: Bibliographisches Institut 1992.

Bruner, J.S.: *Der Prozeß der Erziehung*, Berlin und Düsseldorf: Berlin-Verlag und Schwann 1970 (engl. Original bei Harvard Univ. Press in Cambridge, Mass. 1960).

Fischer, R.: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **8** (1976), 185-192.

Fischer, R.: Offene Mathematik und Visualisierung. In: *mathematica didactica* **7** (1984), 139-160.

Fischer, R., Malle, G., Bürger, H.: *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*, Mannheim:. Bibliographisches Institut 1985.

Freudenthal, H.: Huygens' foundation of probability. In: *Historia Mathematica* **7** (1980) 2, 113-117.

Heitele, D.: An epistemological view on fundamental stochastic ideas. In: *Educational Studies in Mathematics* **6** (1975), 187-205.

v. Hofe, R.: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*, Heidelberg - Berlin - Oxford: Spectrum 1995.

Humenberger, J., Reichel, H.-C.: *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*, Mannheim: Bibliographisches Institut 1995.

Jablonka E.: *Meta-Analyse von Zugängen zur Modellbildung und Folgerungen für den Unterricht*, Dissertation, Technische Universität Berlin 1996.

Keitel, Ch., Otte, M., Seeger, F.: *Text Wissen Tätigkeit*, Königstein: Scriptor 1980.

Laux, J.: Kognitive Psychologie nach Jerome S. Bruner. In: *Der Mathematik-Unterricht* **31** (1985), Heft 4, 10-20.

Piaget, J.: Comments on mathematical education. In: Howson, A. G. (Hrsg.): *Developments in Mathematical Education. Proc. Sec. Intern. Copngress on Mathematical Education*, Cambridge, 79-87.

Reichel, H.-C.: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. In: Pickert, G., Weidig, I. (Hrsg.): *Mathematik erfahren und lehren*, Stuttgart: Klett 1994.

Schreiber, A.: Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: *mathematica didactica* **2** (1979), 165-171.

Schweiger, F.: Fundamentale Ideen zur Analysis und handlungsorientierter Unterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hannover: Schrödel 1982, 103-111.

Schweiger, F.: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematik-Didaktik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* **13** (1992), 199-214.

Schupp, H.: Zu den “Paradoxien des Verstehens”. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* **14** (1993), 331-336.

Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications.* Orlando: Harcourt Brace Jovanovich 1976.

Tietze, U.P.: Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie. In: *mathematica didactica* **2** (1979), 137-163.

Tietze, U.P., Klika, M., Wolpers, H.: *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*, Braunschweig: Vieweg 1982.

Vollrath, H.-J.: Paradoxien des Verstehens. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* **14** (1993), 35-58.

Wittman, E.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Braunschweig: Vieweg 1973.